

Artículo de Investigación

Solución en serie de potencias para el espectro de energía de un potencial de pozo cuadrado finito unidimensional

An series solution for square-well potential

Carlos J. Fernández-Rojas ¹, Freddy Fernández-Rojas ^{2*}

¹ Universidad Nacional Experimental Sur del Lago, Mérida, Venezuela, 5101; fernandezca@unesur.edu.ve

² Departamento de Física, Grupo de Física de la Materia Condensada, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, 5101

*Correspondencia: freddyf@ula.ve

Citación: Fernández-Rojas, C., & Fernández-Rojas, F., (2021). Solución en serie de potencias para el espectro de energía de un potencial de pozo cuadrado finito unidimensional. *NovasinerGía*. 4(2). 38-47. <https://doi.org/10.37135/ns.01.08.02>

Recibido: 06 abril 2021

Aceptado: 05 julio 2021

Publicación: 01 diciembre 2021

NovasinerGía
ISSN: 2631-2654



Copyright: 2021 derechos otorgados por los autores a NovasinerGía.

Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos y condiciones de una licencia de Creative Commons Attribution (CC BY NC). (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Resumen: En el presente trabajo se estudia el problema de una partícula en un pozo de potencial cuadrado finito. Los autovalores correspondientes al hamiltoniano del problema anterior se encuentran por medio de un método que combina el teorema de inversión de Lagrange con una relación de recurrencia para calcular derivadas de orden superior de una función inversa. La metodología utilizada nos permitió obtener una solución en serie de potencias para el potencial de pozo cuadrado finito que dependen del número cuántico principal y de la fuerza de atracción. Por otro lado, nuestros resultados reproducen, como casos particulares, expresiones generales de los autovalores para una partícula ubicada en el fondo del pozo, en la mitad del pozo y en el tope del pozo de potencial. Las energías calculadas se comparan con las soluciones exactas de la ecuación trascendental para el pozo finito.

Palabras clave: Ecuación de Schrödinger, métodos de inversión, niveles de energía, pozos cuánticos, solución en serie.

Abstract: In this work we study the problem of a particle in a finite square potential well. The eigenvalues corresponding to the Hamiltonian of the previous problem are found by a method which combines the Lagrange inversion theorem with a relation of recurrence to calculate derivatives of higher order of an inverse function. The methodology used allowed us to obtain a solution in of power for the finite square well potential that depend on the principal quantum number and of the force of attraction. On the other hand, our results reproduce, as special cases, general expressions of the eigenvalues for a particle located at the bottom of the well, in the middle of the well and at the top of the potential well. The calculated energies are compared with the exact solutions of the transcendental equation for the finite well.

Keywords: Energy levels, inversion methods, Schrödinger equation, potential well, series solution.

1. Introducción

El problema de una partícula de masa m en un potencial de pozo cuadrado finito es tratado en diversos textos de mecánica cuántica (Cohen, Diu & Laloe, 1977; Landau & Lifshitz, 1977; Messiah, 1961) y constituye, además, un problema básico a resolver en los cursos introductorios de física moderna dada su importancia para modelar partículas ligadas a una cierta región del espacio. Aplicaciones del potencial de pozo cuadrado finito son posibles en física molecular y atómica, física del estado sólido (Mckelvey, 1991) y física nuclear (Park, 1992). En nanotecnología su comprensión forma las bases para el entendimiento de diversas heteroestructuras de baja dimensionalidad, tales como pozos cuánticos en semiconductores (Kolbas & Holonyak, 1984). Desafortunadamente el problema del potencial de pozo cuadrado finito conduce a una solución que contiene ecuaciones trascendentales, lo que impide expresar la solución en una forma matemática concisa. Como consecuencia diversos métodos se han aplicado para resolverlo, incluyendo procedimientos numéricos y gráficos (French & Taylor, 1978; Schiff, 1955; Burge, 1985; Bonfim & Griffiths, 2006). Más allá de los procedimientos tradicionales que puedan encontrarse en los textos de física cuántica, algunas soluciones explícitas y novedosas para este problema han sido publicadas por Sierwert, (1978), Sprung, Wu & Martorell (1992), Aronstein & Stroud (2000), Paul & Nkemzi (2000), Leryonas & Combescot (2002) y Blümel (2005).

En este artículo se discute una solución en serie basada en el teorema de inversión de Lagrange (Jeffrey & Jeffreys, 1972), alrededor de un punto general, y demuestra que un método recursivo introducido en la literatura matemática por (Apostol, 2000), para calcular derivadas de orden superior de una función inversa en términos de la función original, puede usarse para evaluar los términos en la serie.

2. Metodología

2.1. Condición de cuantización y niveles de energía exactos.

Para una partícula en movimiento de masa m , confinada en una caja de longitud L y profundidad V_0 , el potencial puede ser escrito como:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq L/2 \\ V_0, & |x| > L/2 \end{cases}$$

Reed (1990) demostró que los niveles de energía para un potencial con estas características pueden obtenerse a partir de una única ecuación trascendental. De esta ecuación y bajo ciertas observaciones Sprung, Wu & Martorell (1992) dedujeron la expresión siguiente, en donde las energías de los estados ligados son soluciones de

$$f(\alpha) = \alpha + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{P}\right) = \frac{n\pi}{2}, \quad \text{si } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

donde n denota el número cuántico principal. α/P , es una razón de altura e indica una región específica del pozo o región de interés. La ecuación (1) establece las condiciones de cuantización para la partícula en el pozo con la interesante novedad de agrupar soluciones pares e impares y de relacionar a n con la escala de acción α , que depende de la energía E . En general, la importancia de la ecuación (1) sobre sus predecesoras es la aparición explícita del número cuántico. Con ella, por ejemplo, se puede determinar directamente el n -ésimo nivel de energía sin necesidad de encontrar primero las anteriores $n-1$ soluciones cuantizadas,

$$\alpha = \frac{\sqrt{2mE} L}{\hbar} \frac{L}{2} \quad (2)$$

Para un dado valor de P , con

$$P = \frac{\sqrt{2mV_0} L}{\hbar} \frac{L}{2} \quad (3)$$

P es una medida de la fuerza de atracción del potencial que depende de la profundidad del pozo. Los niveles de energía para el caso particular del potencial de pozo cuadrado infinito se obtienen de forma inmediata haciendo $P \rightarrow \infty$ en la ecuación (1),

$$\alpha = \frac{n\pi}{2} \quad (4)$$

$$E_n = \frac{2\hbar^2\alpha^2}{mL^2} \quad (5)$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (6)$$

Otras soluciones exactas y simples como la ecuación (6) son posibles para "ángulos especiales" de α/P en la ecuación (1). En la tabla 1 se muestran algunos valores de α/P que producen soluciones cerradas para los niveles de energía de la partícula en el pozo finito (Maor, 1988).

Tabla 1: Algunos valores especiales (ángulos) para $\frac{\alpha}{P}$, ecuación (1), que conducen a expresiones simples para las energías discretas de una partícula en un potencial de pozo cuadrado finito (en unidades de $\frac{\hbar^2}{mL^2}$).

α/P	E_n
0	$\frac{n^2\pi^2}{2}$
1/2	$\frac{\pi^2}{2} \left(n - \frac{1}{3}\right)^2$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi^2}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\pi^2 \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$
1	$\frac{\pi^2}{2} (n-1)^2$

2.2. Solución general en serie de potencias para los niveles de energía de un potencial de pozo cuadrado finito.

Fórmula de inversión de Lagrange.

Si $y = f(x)$ es una función que toma un desarrollo de Taylor en potencias convergentes de x alrededor de algún punto a , con $f(a) = \beta$ y derivada primera $f'(a) \neq 0$, entonces puede demostrarse que existe una única función $x = g(y)$ expresable como una serie de potencias en y , la cual converge en algún punto alrededor de a satisfaciendo $f[g(y)] = y$ en ese alrededor

$$x = g(y) = a + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(y - \beta)^i}{i!} \left[\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left(\frac{x - a}{f(x) - \beta} \right)^i \right]_{x=a} \tag{7}$$

Fórmulas de Apostol para derivadas de orden superior.

El teorema de inversión de Lagrange da una expresión formal, ecuación (7), para el desarrollo en serie de potencias de la función $g(y)$ (Jeffreys & Jeffreys, 1972). Dada que ésta es la serie de Taylor para $g(y)$, el término dentro de los corchetes en la ecuación (7) representa la i -ésima derivada de g evaluada en a . A partir de esta observación Apostol (2000) construyó un método para evaluar las derivadas de g , alrededor de un punto arbitrario a , directamente de la función original $f(x)$, sin introducir series de potencias y sin la necesidad de diferenciar el cociente $x - a / f(x) - \beta$. Apostol (2000) evaluó de forma explícita las derivadas hasta $i = 9$ y encontró una fórmula para la $(i + 1)$ -ésima derivada dada por

$$f_1^{2i-1} \frac{d^i x}{dy^i} = Y_i \tag{8}$$

Donde Y_i es un polinomio homogéneo en f_1, f_2, \dots, f_i , con coeficientes enteros, que puede determinarse sucesivamente mediante la fórmula recursiva

$$Y_{i+1} = f_1 Y_i' - (2i - 1) f_2 Y_i \tag{9}$$

Donde $Y_i = 1$ y Y_i' representa la diferenciación de Y_i con respecto a x .

Fórmulas explícitas para los niveles de energía del pozo finito

De la ecuación (1) hagamos $\alpha / P = r$ y definamos r como la razón de alturas para el pozo. De esta última relación al despejar α obtenemos un punto alrededor del cual puede evaluarse la serie. En consecuencia, al usar la fórmula de Lagrange, ecuación (7), alrededor de $a = \alpha = rP$, para invertir la ecuación (1), resulta

$$\alpha = rP + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} \left[\frac{d^{i-1}}{d\alpha^{i-1}} \left(\frac{\alpha - rP}{f(x) - rP - \sin^{-1} r} \right)^i \right]_{\alpha=rP} \tag{10}$$

$$= rP + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} \left(\frac{d^i \alpha}{dy^i} \right)_{\alpha=rP} \tag{11}$$

De la observación de Apóstol (2000) se tiene

$$\alpha = rP + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} \left(\frac{Y_i}{f^{2i-1}} \right)_{\alpha=rP} \tag{12}$$

Donde

$$\eta = \frac{n\pi}{2} - rP - \sin^{-1} r \tag{13}$$

La ecuación (12) puede evaluarse conociendo Y_i , la cual, a su vez, se obtiene de la relación recursiva ecuación (9) con

$$f_1 = 1 + \frac{1}{P \left(1 - \frac{\alpha^2}{P^2} \right)^{1/2}} \tag{14}$$

$$f_2 = \frac{\alpha}{P^3 \left(1 - \frac{\alpha^2}{P^2}\right)^{3/2}} \tag{15}$$

A continuación, se dan algunas expresiones explícitas obtenidas para los coeficientes $g_i = \left(\frac{d^i \alpha}{dy^i}\right)_{\alpha=rP}$:

$$g_1 = \frac{P\sqrt{1-r^2}}{P\sqrt{1-r^2} + 1} \tag{16}$$

$$g_2 = -\frac{rP}{\left(P\sqrt{1-r^2} + 1\right)^3} \tag{17}$$

$$g_3 = -\frac{\left[P(2r^2 + 1)\sqrt{1-r^2} + 1 - r^2\right]P}{\left(P\sqrt{1-r^2} + 1\right)^5 \sqrt{1-r^2}} \tag{18}$$

$$g_4 = -\frac{\left[(6r^2 + 9)P^2 + 8P\sqrt{1-r^2} - 1\right]rP}{\left(P\sqrt{1-r^2} + 1\right)^5} \tag{19}$$

$$g_5 = -\left\{\left[(24r^4 + 72r^2 + 9)P^3 - (22r^2 - 7)P\right]\sqrt{1-r^2} \right. \tag{20}$$

$$\left. - (58r^4 - 41r^2 - 17)P^2 - 1 + r^2\right\}P / \left(P\sqrt{1-r^2} + 1\right)^9 \sqrt{1-r^2}$$

$$g_6 = -\left\{(120r^4 + 600r^2 + 225)P^4 + [(444r^2 + 396)P^3 - 52P]\sqrt{1-r^2} \right. \tag{21}$$

$$\left. - (328r^2 - 118)P^2 + 1\right\}rP / \left(P\sqrt{1-r^2} + 1\right)^{11}$$

Con esta metodología y con el uso adecuado de algún programa de manipulación simbólica se pueden evaluar tantos términos como uno desee en la serie. De las expresiones dadas para g_i se sigue entonces que la energía E de una partícula en un potencial de pozo cuadrado finito unidimensional como función del número cuántico principal y de la profundidad del pozo está dada por (en unidades de \hbar^2/mL^2)

$$E = 2g_0^2 + 4g_0g_1\eta + 2(g_1^2 + g_0g_2)\eta^2 + \left(\frac{2}{3}g_0g_3 + 2g_1g_2\right)\eta^3 + \left(\frac{1}{6}g_0g_4 + \frac{1}{2}g_2^2 + \frac{2}{3}g_1g_3\right)\eta^4 + \left(\frac{1}{30}g_0g_5 + \frac{1}{3}g_2g_3 + \frac{1}{6}g_1g_4\right)\eta^5 + \left(\frac{1}{30}g_1g_5 + \frac{1}{18}g_3^2 + \frac{1}{12}g_2g_4 + \frac{1}{180}g_0g_6\right)\eta^6 + \dots \tag{22}$$

con $g_0 = rP$ y η definida en la ecuación (13).

3. Resultados

En lo que sigue se harán algunas consideraciones especiales sobre la ecuación (22) con el objeto de encontrar una aproximación general y dos aproximaciones particulares para el problema

de la partícula en una caja unidimensional. Es de hacer notar que estas consideraciones se centraron en la razón de alturas del pozo. Para el caso de las aproximaciones particulares se observó que tomando una razón de alturas adecuada las soluciones obtenidas dan expresiones sencillas para evaluar el espectro de energía de manera muy exacta.

3.1. Aproximación general

Una muy buena aproximación puede obtenerse expandiendo hasta el tercer orden en r la expresión dada en la ecuación (13), e igualando a cero, con lo que se resulta, después de algunos rearrreglos

$$r^3 + 6(1+P)r - 3n\pi = 0 \tag{23}$$

Este polinomio tiene sólo una raíz positiva

$$r = \frac{1}{2} \frac{(12n\pi + 4\sqrt{p})^{\frac{2}{3}} - 8(1+P)}{(12n\pi + 4\sqrt{p})^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{si } p = 32P^3 + 96P^2 + 32 + 9n^2\pi^2 \tag{24}$$

Dado este caso se observa que la razón de alturas depende de n y P , lo que hace a r un término variable, ideal para evaluar cualquier altura del pozo dado un valor del número cuántico principal.

En la tabla 2, usando la ecuación (24) en la ecuación (22), se comparan las energías calculadas variando P y n con los valores exactos de la ecuación (1). Los cálculos se han extendido hasta potencias de tercer orden en n y demuestran que esta aproximación general conduce a soluciones numéricas cuya convergencia ocurre de manera rápida y muy exacta. Incluso usando el primero o segundo término en la serie de potencias en n es suficiente para evaluar confiablemente el espectro de energía del pozo finito.

Tabla 2: Aproximación general. Niveles de energía^a calculados (en unidades de $\frac{h}{mL^2}$) usando la ecuación (23) en la ecuación (22). Comparación de resultados con las energías exactas de la ecuación (1).

P	n	E (exacta)	1er orden	2do orden	3er orden	P	n	E (exacta)	1er orden	2do orden	3er orden
1.00	1	1.092494	1.092433	1.092489	1.092494	6.00	1	3.616711	3.616711	3.616711	3.616711
			(1.0733)	(1.0971)	(1.0930)				(3.5969)	(3.6167)	(3.6167)
4.50	1	3.286656	3.286656	3.286656	3.286656	2	14.351758	14.351758	14.351755	14.351758	14.351758
			(3.2594)	(3.2867)	(3.2867)				(14.2827)	(14.3520)	(14.3518)
			12.917873	12.917841	12.917873				12.917873	3	31.773621
(12.8347)	(12.9179)	(12.9179)	(31.6624)	(31.7755)	(31.7737)						
3	27.882089	27.880960	27.882014	27.882014	27.882090	4	54.621390	54.620384	54.621089	54.621089	54.621401
			(27.8189)	(27.8912)	(27.8831)				(54.5710)	(54.6323)	(54.6226)

^a Los valores entre paréntesis corresponden a la aproximación de la referencia (Sprung, Wu & Martorell, 1992).

3.2. Aproximaciones particulares.

Para este caso introduzcamos como condición que r sea un valor fijo. Dada esta situación podemos examinar dos importantes regiones; el fondo y la mitad del pozo.

Fondo del pozo.

Esta región está descrita por $r=0$ y corresponde a un pozo de profundidad muy grande. Evaluando r en las ecuaciones (16-21) y ecuación (13), y sustituyendo en la ecuación (22), resulta, hasta potencias de octavo orden en η , con $\eta = n\pi/2$, y en unidades de \hbar^2/mL^2 ,

$$E_n = \frac{2P^2}{(P+1)^2} \left[\eta^2 - \frac{1}{3(P+1)^3} \eta^4 - \frac{27P-8}{180(P+1)^6} \eta^6 - \frac{225P^2-117P+8}{2520(P+1)^9} \eta^8 - \dots \right] \tag{25}$$

Para un pozo de profundidad infinita ($P \rightarrow \infty$) esta serie se reduce

$$\lim_{P \rightarrow \infty} E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 \tag{26}$$

El factor $P^2/(P+1)^2$ observado en la ecuación (25) distingue los estados ligados más bajos de un pozo finito de aquellos estados correspondiente a un pozo infinito y aparece como un factor de corrección de orden principal en la solución de otros autores (Sprung, Wu & Martorell, 1992; Paul & Nkemzi, 2000).

Mitad del pozo

Esta región está descrita por $r=1/2$. Haciendo uso de las ecuaciones pertinentes al caso, resulta de la ecuación (22), hasta potencias de cuarto orden en η , (en unidades de \hbar^2/mL^2)

$$E_\eta = \frac{P^2}{2} + \frac{6P^2}{(3P+2\sqrt{3})} \left[\eta + \frac{9P+4\sqrt{3}}{(3P+2\sqrt{3})^2} \eta^2 - \frac{12(5\sqrt{3}P+8)}{(3P+2\sqrt{3})^4} \eta^3 - \frac{12\sqrt{3}(57P^2+41\sqrt{3}P+16)}{(3P+2\sqrt{3})^6} \eta^4 - \dots \right] \tag{27}$$

En la tabla 3 y tabla 4, usando las ecuaciones (25) y (27), respectivamente, se comparan las energías calculadas para distintos valores de P y n con las energías exactas de la ecuación (1). En ambos casos se observa que para valores fuera de la región para la que se ha hecho la aproximación la solución tiende a fallar.

Tabla 3: Fondo del pozo, $r=0$. Niveles de energía^b calculados con la ecuación (25). Comparación de resultados con las energías exactas de la ecuación (1).

P	Energía exacta	Segundo orden	Cuarto orden	Sexto orden	Octavo orden
1.00	1.0925	1.2337	1.1069	1.0945	1.0928
2.50	2.4665	2.5178	2.4695	2.4667	2.4665
4.50	9.0342	10.0710	9.2983	9.1219	9.0672
	3.2867	3.3035	3.2871	3.2867	3.2867
6.00	12.9179	13.2139	12.9526	12.9232	12.9188
	27.8821	29.7312	28.4084	28.0744	27.9611
	3.6167	3.6256	3.6169	3.6167	3.6167
	14.3518	14.5023	14.3632	14.3529	14.3519
	31.7736	32.6301	31.9259	31.8089	31.7829
	54.6214	58.0091	55.7835	55.1261	54.8661

^b Todos los números están dados en unidades de $\frac{\hbar}{mL^2}$.

Tabla 4: Mitad del pozo, $r = 1/2$. Niveles de energía^c calculados con la ecuación (27). Comparación de resultados con las energías exactas de la ecuación (1).

P	Energía exacta	Primer orden	Segundo orden	Tercer orden	Cuarto orden
1.00	1.0925	1.0079	1.1139	1.0964	1.0930
2.50	2.4665	2.4314	2.4658	2.4665	2.4665
	9.0342	7.8039	9.3708	9.1552	9.0764
4.50	3.2867	1.5103	3.2180	3.3028	3.2833
	12.9179	12.7606	12.9205	12.9181	12.9179
	27.8821	24.0110	28.4479	28.0927	27.9612
6.00	3.6167	-1.6517	3.4235	3.6776	3.6225
	14.3518	14.1558	14.3500	14.3519	14.3518
	31.7736	29.9632	31.8440	31.7867	31.7760
	54.6214	45.7706	55.9055	55.1886	54.8792

^c Todos los números en unidades de $\frac{\hbar}{mL^2}$.

4. Discusión

Se ha obtenido una solución general en serie de potencias para el problema de una partícula en un pozo de potencial cuadrado finito unidimensional basada en la fórmula de inversión de Lagrange, alrededor de un punto general, y en las fórmulas de Apostol (2000) para derivadas de orden superior de una función inversa en términos de la función original. A partir de la solución general, ecuación (22), se han examinado algunas aproximaciones al espectro de energía. En la aproximación general los resultados demuestran que la razón de alturas de la ecuación (24) usada en la ecuación (22), en potencias de primero o segundo orden en η , favorece ampliamente la convergencia de los resultados. Esta razón de alturas se ajusta mejor que la propuesta dada en Sprung, Wu & Martorell (1992). Para los casos particulares de $r = 0$ (fondo del pozo) y $r = 1/2$ (mitad del pozo) se han hallado soluciones en serie de potencias hasta sexto y octavo orden en η , respectivamente. En el caso de $r = 0$ la serie se simplifica considerablemente. Estas ecuaciones particulares alrededor de un r fijo son útiles para estudiar el espectro de energía en aquellas regiones del pozo para la cuales fueron derivadas las fórmulas.

Por otra parte, considerando valores especiales para α/P se han encontrado soluciones cerradas a la ecuación de cuantización de la partícula en el pozo finito. Estos resultados pueden ser útiles en procedimientos de interpolación cuyo fin sea el cálculo de las energías de una partícula bajo la influencia de un dado potencial seleccionado aleatoriamente.

5. Conclusiones

La aproximación matemática usada en este trabajo es muy general e incorpora métodos matemáticos elementales, tales como; series de Taylor, funciones inversas y derivadas de orden superior. Su aplicación puede extenderse a otros problemas de la mecánica cuántica de partículas confinadas por barreras finitas en sistemas de dos o incluso de tres dimensiones. Es claro que el problema de una partícula en un pozo de potencial finito tridimensional es mucho más complejo debido a la aparición de un término extra en el hamiltoniano (momento angular), sin embargo, atacar este problema con esta metodología podría ser, como se ha demostrado, una alternativa viable.

Contribución de los autores (rellenar el cuadro con color según la contribución realizada)

En concordancia con la taxonomía establecida internacionalmente para la asignación de créditos a autores de artículos científicos (<https://casrai.org/credit/>). Los autores declaran sus contribuciones en la siguiente matriz:

	Fernández-Rojas, C.	Fernández-Rojas, F.
Conceptualización		
Análisis Formal		
Investigación		
Metodología		
Recursos		
Validación		
Redacción – revisión y edición		

Conflicto de Interés

Los autores declaran que no existe conflicto de interés de naturaleza alguna con presente investigación.

Referencias

- Apostol, T. M. (2000). *Am. Math. Month.* 107(8), 738-741. <https://doi.org/10.2307/2695472>
- Blümel, R. (2005). *J. Phys. A: Math. Gen.* 38(42), L673-L678. <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/38/42/L02>
- Bonfim, F. & Griffiths, D. J. (2006). *Am. J. Phys.* 74(1), 43-48. <https://doi.org/10.1119/1.2140771>
- Burge, E. J. (1985). *Eur. J. Phys.* 6(3), 154-164. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/6/3/006>
- Cohen, C., Diu, B. & Laloe, F. (1977). *Quantum Mechanics*, New York: Wiley. Recuperado de <https://archive.org/details/QuantumMechanicsVol1CohenTannoudji/page/n15/mode/2up>
- Jeffreys, H. & Jeffreys, B. (1972). *Methods of Mathematical Physics*. England: Cambridge U.P.
- Kolbas, R. M. & Holonyak, N., (1984). *Am. J. Phys.* 52(5), 431-437. <https://doi.org/10.1119/1.13649>
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1977). *Quantum Mechanics*. Third Edition, Oxford, England: Pergamon Press.
- Leyronas, X. & Combescot, M. (2002). *Sol. Stat. Comm.* 119. 631-634. [https://doi.org/10.1016/S0038-1098\(01\)00288-5](https://doi.org/10.1016/S0038-1098(01)00288-5)
- Maor, E. (1988). *Trigonometric Delights*. New Jersey, United States: Princenton U.P.
- Mckelvey, J. M. (1991). *Física del Estado Sólido y de Semiconductores*. Mexico, D. F.: Editorial Limusa.
- Messiah, A. (1961). *Quantum Mechanics*, Amsterdam, Netherlands: North-Hollan.
- Park, D. (1992). *Introduction to the Quantum Theory*. New York: McGraw-Hill.

Paul, P. & Nkemzi, D. (2000). *J. Math. Phys.* 41(7), 4551-4555. <https://doi.org/10.1063/1.533361>

Reed, B. C. (1990). *Am. J. Phys.* 58(5), 503-504. <https://doi.org/10.1119/1.16457>

Schiff, L. I. (1955). *Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill.

Siewert, C. E. (1978). *J. Math. Phys.* 19(2), 434-435. <https://doi.org/10.1063/1.523662>

Sprung, D. W., Wu, H. & Martorell, J. (1992). *Eur. J. Phys.* 13(1), 21-25. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/13/1/005>