

Atractores en funciones lineales crecientes por parte en la recta real

Attractors in piecewise increasing linear maps in the real line

Anibal Iñiguez¹, Bladismir Ruiz Leal^{2*}

¹ Instituto de Postgrado, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador; 130105; tnlganibal@gmail.com

² Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador; 130105;

*Correspondencia: luis.ruiz@utm.edu.ec

Citación: Iñiguez, A., & Ruiz, B., (2021). Atractores en Funciones Lineales Crecientes por Parte en la Recta Real. *Novasiner^gia*. 4(2). 48-61. <https://doi.org/10.37135/ns.01.08.03>

Recibido: 31 agosto 2021

Aceptado: 29 octubre 2021

Publicado: 01 diciembre 2021

Novasiner^gia
ISSN: 2631-2654

Resumen: Las funciones lineales por parte (o a trozos) aparecen como modelos matemáticos para describir sistemas provenientes de la ingeniería eléctrica, ciencias físicas y economía, recientemente también aparece en modelos de la actividad neuronal. Se considera una familia a 4 parámetros de funciones lineales crecientes por parte sobre la recta real \mathbb{R} usando la teoría de funciones continua crecientes por parte sobre intervalos compactos para estudiar la existencia de conjuntos atractores y describir la dinámica del atractor, verificando la existencia de órbitas periódicas, transitividad y la existencia de medidas ergódicas invariantes. Se demuestra específicamente los diferentes valores del parámetro donde la familia exhibe un intervalo atractor. Se prueba las condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto atractor sea globalmente atractor, de hecho, en este caso se prueba que la dinámica de dicho atractor se comporta como la dinámica de la rotación de Poincaré del círculo unitario. También, se describe bajo qué condiciones en los parámetros la familia exhibe un atractor topológico. Finalmente se prueba la existencia de medidas invariantes ergódicas absolutamente continua a la medida de Lebesgue asociado a la familia restringida al atractor, inclusive se prueba el caso equivalente a la medida de Lebesgue.

Palabras clave: Atractor topológico, Atractor global, Funciones lineales por parte, Transitividad, medidas invariantes ergódicas

Abstract: Piecewise linear maps appear in mathematical models to describe systems from electrical engineering, physical sciences and economics recently also appears in models of neural activity. It is considered a family with 4 parameters of piecewise increasing linear maps on the real line \mathbb{R} using the theory of piecewise continuous increasing transformations on the compact intervals to study the existence of an attractor set and describe the dynamics of the attractor, verifying the existence of periodic orbits, transitivity and the existence of ergodic invariant measures. The different values of the parameter where the family exhibits an attractor interval are specifically demonstrated. The necessary and sufficient conditions are tested for the attractor set to be globally attractor. in fact, in this case it is proved that the dynamics of said attractor behaves like the dynamics of the Poincaré rotation on the unit circle. Also, it is described under what conditions in the parameters the family exhibits a topological attractor. Finally, the existence of absolutely continuous ergodic invariant measures to the Lebesgue measure associated with the family restricted to the attractor is proven, the case in which the measure is equivalent to the Lebesgue measure is even tested.

Keywords: Topological attractor, Global Attractor, Piecewise linear maps, Transitivity, invariant ergodic measure.



Copyright: 2021 derechos otorgados por los autores a Novasiner^gia.

Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos y condiciones de una licencia de Creative Commons Attribution (CC BY NC). (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introducción

Uno de los primeros estudios de la dinámica de transformaciones lineales por partes (o a trozos) comenzó con (Rényi, 1957) mostrando que la siguiente aplicación (ecuación 1) preserva una única medida ergódica equivalente a la medida de Lebesgue para $p > 1$.

$$f_p(x) = \begin{cases} px, & \text{si } 0 \leq x < 1/p \\ p\left(x - \frac{1}{p}\right), & \text{si } 1/p \leq x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

Más tarde Parry en su trabajo (W. Parry, 1964) generaliza la transformación de Rényi considerando $T(x) = (\beta x + \alpha) \bmod 1$, mostrando también que T preserva una única medida ergódica equivalente a la de Lebesgue para $\beta > 1$. Posteriormente Wilkinson en (Wilkinson, 1974) generaliza el trabajo de Parry. A partir de este trabajo se generalizó para funciones crecientes por parte en un intervalo compacto, ver (Boyarsky & Góra, 1997). Es bien conocido que la dinámica de una transformación sobre un espacio de fase no acotado o no compacto se comporta diferente al caso acotado. Una pregunta natural es: Como es la dinámica de una transformación lineal por partes sobre \mathbb{R} ? En respuesta a esta pregunta, en (NUSSE & YORKE, 1995) y con mayor detalle en (Jain & Banerjee, 2003) estudió la transformación lineal por partes $f_{\alpha\beta ab}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en la ecuación 2 como un caso unidimensional, para determinar la existencia de bifurcación de colisión de frontera esto es, una bifurcación que ocurre cuando un punto fijo (o una órbita periódica), a medida que se mueve el parámetro, cruza o colisiona con la frontera entre las dos regiones de comportamiento suave.

$$f_{\alpha\beta ab}(x) = \begin{cases} \alpha x - a, & \text{si } x \geq 0 \\ \beta x + b, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Estos dos trabajos dieron inicio al estudio de esta familia a 4 parámetros. El caso de los parámetros $-a \leq b < 0$ la dinámica es simple y puede aparecer hasta dos puntos fijos atractor o repulsor. También se puede ver el itinerario de las órbitas cuando va de la componente conexa positiva a la componente conexa negativa de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ver (Rajpathak et al., 2012). El caso $\alpha > 1$ y $\beta > 1$ es estudiado por (Rajpathak et al., 2015) probando que existe una órbita caótica y describen el comportamiento de las órbitas periódicas estables, en ese mismo trabajo se menciona la existencia de una región atractora pero no indica exactamente sus dimensiones. En (Avrutin et al., 2014) analizan y estudian numéricamente las bifurcaciones del atractor para diferentes valores del parámetro de $f_{\alpha\beta ab}$. En (Avrutin et al., 2006) realizan un estudio de otro tipo de bifurcaciones (bifurcaciones de codimensión 2 y codimensión 3) que aparecen en la transformación $f_{\alpha\beta ab}$ con $a = b$. Recientemente en (Du et al., 2018) estudia numéricamente el atractor también. En todos estos trabajos mencionados anteriormente ninguno identifica exactamente el conjunto atractor. Tampoco se identifica con las regiones en el espacio de parámetros donde $f_{\alpha\beta ab}$ exhibe un conjunto atractor no trivial, es decir que no sea un punto fijo, una órbita periódica o una unión finita de órbitas periódicas. Hasta el momento no hay un estudio sobre las medidas ergódicas que pueden estar soportadas sobre el atractor. En este trabajo se da respuesta positiva a todas estas interrogantes.

En este trabajo se considera los parámetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 0$ y $b > 0$. Se prueba exactamente para que valores del parámetro el conjunto $A = [-a, b)$ es atractor. También se identifica los valores del parámetro donde el atractor A es caótico (la dinámica de $f_{\alpha\beta ab}$ restringido a A , denotada por f_A , posee una órbita densa en A). Inclusive se prueba que si $f_{\alpha\beta ab}(-a) = f_{\alpha\beta ab}(b)$ con $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ la dinámica del atractor se comporta exactamente como la rotación de Poincaré del círculo unitario, en este caso se prueba que si $\frac{a}{b}$ es racional e irreducible entonces, todos los puntos de A son periódicos de periodo $a + b$, y si $\frac{a}{b}$ es irracional entonces, la órbita de todos los puntos de A es denso en A . También, se muestra los valores del parámetro donde el atractor es global, es decir, todas las órbitas de los puntos de la recta real \mathbb{R} son atraídos por el conjunto A . Además, se prueba los valores del parámetro donde $f_{\alpha\beta ab}$ restringido a A posee una medida invariante absolutamente continua a la medida de Lebesgue y valores del parámetro donde $f_{\alpha\beta ab}$ restringido a A admite una medida equivalente a la medida de Lebesgue.

Es importante destacar que las funciones continua lineales por partes aparecen como modelos matemáticos en muchos sistemas prácticos de ingeniería eléctrica (Banerjee & Verghese, 2001). Además, también aparece como modelo para describir fenómenos en Ciencias Física y Economía, según (Tramontana & Gardini, 2011). Recientemente (Belyaev & Ryazanova, 2019) estudian el atractor que aparece en una familia de funciones lineales por parte como un modelo de actividad neuronal.

El capítulo 3 de resultados, está organizado en dos secciones. En la sección 3.1 se estudia la existencia del atractor y se identifica exactamente la región de los parámetros para los cuales $f_{\alpha\beta ab}$ exhibe a $A = [-a, b)$ como atractor. En la sección 3.2 se estudia la dinámica del atractor primero el caso en que f_A es biyectiva y luego el caso en que los parámetros satisfacen la condición $f_{\alpha\beta ab}(-a) < f_{\alpha\beta ab}(b)$ para analizar la existencia de medidas invariantes.

2. Metodología

La metodología lógico-deductiva que forma parte ineludible de la investigación en matemática fue usada para aplicar teoremas generales sobre transformaciones continuas por partes definidas sobre un intervalo compacto al modelo estudiado de funciones lineales crecientes por partes bajo la existencia del atractor A .

Los objetivos fueron alcanzados de la siguiente forma: primero, identificar la forma topológica del atractor e identificar exactamente los parámetros donde la transformación $f = f_{\alpha\beta ab}$ para alcanzar esto se implementó la condición en los parámetros: $-a \leq f(-a) \leq f(b) \leq b$. Note que, si $f(-a) > f(b)$ entonces, el candidato a atractor, el intervalo A , satisface que $f(A) \not\subseteq A$ y esto implica que A no sea atractor.

El segundo objetivo es estudiar la dinámica del atractor según los parámetros de la familia f . El primer caso se concentra cuando f_A (f restringido a A) es biyectiva en este caso usamos la teoría existente sobre homeomorfismos del círculo unitario cuya conexión con la familia a 4 parámetros en estudio se hace mediante una conjugación topológica, ya que la conjugación topológica permite identificar dinámicas equivalentes. El segundo caso

correspondiente a la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas a la de Lebesgue el objetivo es conseguido aplicando teoremas existentes sobre la transformación del Lorenz unidimensional sobre un intervalo compacto.

3. Resultados

Considere la función $f_{\alpha\beta ab}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_{\alpha\beta ab}(x) = \begin{cases} \alpha x - a, & \text{si } x \geq 0 \\ \beta x + b, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 0$, y $b > 0$. Para facilitar el lenguaje en este capítulo se considera la siguiente notación: $f = f_{\alpha\beta ab}$, $f_- = f|_{(-\infty, 0)}$, $f_+ = f|_{(0, +\infty)}$ y $A = [-a, b]$. Para el estudio de la dinámica de f según los parámetros se necesita lo siguiente:

Condición 1. $-a \leq f(-a) \leq f(b) \leq b$.

Esta condición es necesaria para probar la existencia del atractor A .

3.1. Existencia del Atractor

Definición 3.1 Un conjunto Λ es un **atractor** para f si, $f(\Lambda) = \Lambda$ y existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ con $\Lambda \subset U$ tal que $d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Al conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ tal que $d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$ se denomina **cuenca de atracción** de Λ y se denota por $B(\Lambda)$. Λ es un **atractor global** para f si, Λ es un atractor y $B(\Lambda) = \mathbb{R}$. Aquí $d(x, y) = |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Debido que la función $f = f_{\alpha\beta ab}$ no es continua, la definición de atractor considerada aquí difiere con la definición clásica, como por ejemplo la considerada en (Milnor, 1985). En este caso el atractor no es cerrado.

Definición 3.2 Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un atractor topológico para f si, A es un atractor y $f_A = f|_A$ es transitivo.

Lema 3.3 Si f satisface la condición 1 entonces, $f(A) = A$.

Demostración. Observemos primero que, como $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, la función f es creciente en cada componente conexa $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Sea $y \in f(A)$ entonces, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in A$ se tiene que $x \in [-a, 0] \cup (0, b)$. Si $x \in [-a, 0]$ por definición de f implica que, $f(x) = \beta x + b$. De esto y la condición (1) se tiene que, $-a \leq f(x) < b$ por tanto $y \in A$. Si $x \in (0, b)$ por definición de $f(x) = \alpha x - a$, esto junto a la condición (1) implica que $-a \leq f(x) < b$ y esto significa que $y \in A$. Por tanto $f(A) \subset A$.

Note que si f satisface la condición 1 y $f(b) = b$ entonces, en este caso particular $f(\bar{A}) = \bar{A}$. Por tanto \bar{A} , la clausura de A , también, es atractor.

Observación 3.4 Suponga que f satisface la condición 1.

- a) Si $\alpha < 1$, entonces $\beta > 1$;
- b) Si $\beta < 1$, entonces $\alpha > 1$.

Lema 3.5 Suponga que f satisface la condición 1.

- a) Si $\beta > 1$, entonces existe un punto fijo q , con $q \leq -a$, tal que $f^n(x) \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$, para todo $x < q$. Ver figura 1.
- b) Si $\alpha > 1$, entonces existe un punto fijo p , con $p \geq b$, tal que $f^n(x) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ para todo $x > p$. Ver figura 1.

Demostración. Caso a) Si $\beta > 1$, esto implica que f_- tiene un punto fijo q , que por la condición 1, $q \leq -a$. Además, $f(x) < x$ para todo, $x < q$. Como f_- no tiene puntos fijos en $(-\infty, q)$, por tanto que $f^n(x) \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$, para todo $x < q$. El caso b) es análogo púes, por el hecho que $\alpha > 1$ y la condición 1 existe un punto fijo p con $p \geq b$ y $f(x) > x$ para todo $x > p$.

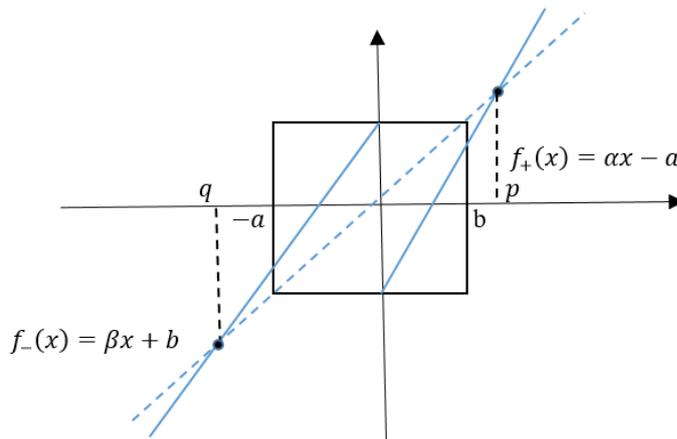


Figura 1: Gráfica de f para valores del parámetro $\beta > 1$ y $\alpha > 1$.

El siguiente resultado da una condición necesaria para identificar cuando $A = [-a, b)$ es un atractor, además, mostrará que la trayectoria de cada punto de la cuenca de atracción de A a partir de una determinada iterada queda contenido en A .

Teorema 3.6 Suponga que f satisface la condición 1. Si $-a < f(-a)$ o $f(b) < b$, entonces A es un atractor. Además, $B(A) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A)$.

Demostración. Por el lema 3.3, $f(A) = A$. Faltaría probar la segunda parte la definición de conjunto atractor (ver definición 3.1). Suponga que $-a < f(-a)$. Se probará que si $\beta \leq 1$ entonces, tal que, para todo $x \in (-\infty, -a)$ existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in A$. Para ello, sea $x \in (-\infty, -a)$. Por hipótesis f_- no tiene puntos fijos y $f'_-(x) = \beta \leq 1$ entonces, $f(x) > x$. Al iterar varias veces f sobre el punto x , se sigue que existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \geq -a$ y $f^{n-1}(x) < -a < 0$. Por tanto $f^n(x) < b$ y así, $f^n(x) \in A$. Si $\beta > 1$, como $-a < f(-a)$ implica que existe un punto fijo $q < -a$ y $f(x) > x$ para todo $x \in (q, -a)$. Entonces, iterando f varias veces existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \geq -a$ y $f^{n-1}(x) < -a < 0$. Por tanto $f^n(x) < b$, es decir, $f^n(x) \in A$. Por tanto A es un atractor. Ahora, si $f(b) < b$ la prueba es análogo al caso anterior. Si $\alpha \leq 1$ se muestra que para todo $x > b$, existe $n \geq 1$ tal que

$f^n(x) \in A$ y si $\alpha > 1$ se muestra que existe un punto fijo $q > b$ tal que $f(x) < x$ para todo $x \in (b, q)$. Entonces, iterando f varias veces existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in A$. Para terminar la prueba sólo falta ver que $B(A) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A)$. Claro está que $\bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(A) \subset B(A)$. Si $-a < f(-a)$ y $\beta < 1$, se mostró que $(-\infty, -a) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A)$, por la observación 3.4, resulta que $\alpha > 1$, en este caso existe un punto fijo q , con $q \geq b$. Si $q = b$, entonces por el Lema 3.5 $B(A) = (-\infty, -b]$, esto implica que $B(A) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A)$. Si $q > b$ ya se demostró que $(b, q) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A)$, de aquí y lema 3.5 se tiene que $B(A) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A)$. Ahora, si $f(b) < b$, el razonamiento es análogo. Por tanto, $B(A) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A)$.

Condición 2. $-a < f(-a)$ o $f(b) < b$. Ver figura 2.

De la demostración del Teorema 3.6 se puede extraer el siguiente resultado, que ya había sido observado por (Jain & Banerjee, 2003).

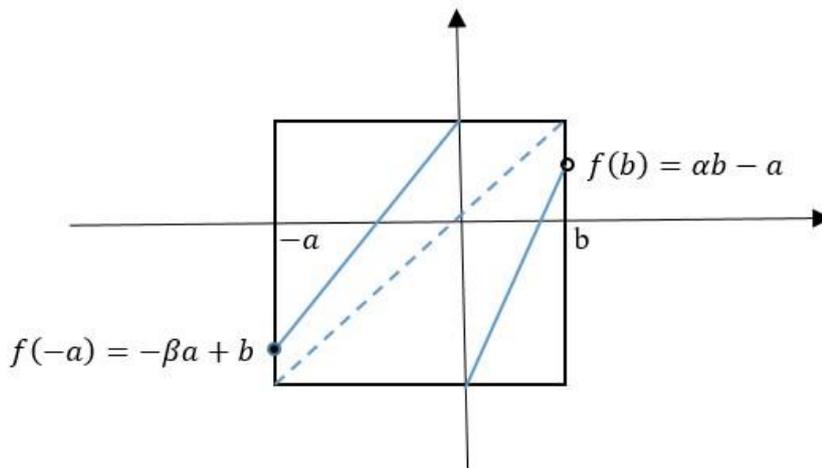


Figura 2: Gráfica de f_A para valor de los parámetros $\beta > 1$ y $\alpha > 1$.

Corolario 3.7 Suponga que f satisface la condición 1.

- a) Si $\alpha \leq 1$, entonces, f_+ no posee un punto fijo y $(b, +\infty) \subset B(A)$;
- b) Si $\beta \leq 1$, entonces f_- no posee un punto fijo y $(-\infty, -a) \subset B(A)$;

Corolario 3.8 Suponga que f satisface la condición 1. El conjunto A es atractor global para f sí, y solo si, $\alpha = \beta = 1$. Ver figura 3.

Demostración. (\Rightarrow) Suponga que A es un atractor global, esto implica que f no tiene puntos fijos. Por tanto por lema 3.5, $\alpha \leq 1$ y $\beta \leq 1$. Si $\alpha < 1$ por observación 3.4, $\beta > 1$ y esto es una contradicción. Así, $\alpha = 1$. Ahora, si $\beta < 1$ por observación 3.4, $\alpha > 1$ esto es una contradicción, luego $\beta = 1$.

(\Leftarrow) suponga que $\alpha = \beta = 1$, entonces f satisface la condición 1 y 2. Por el teorema 3.6 y el corolario 3.7 se sigue que A es un atractor global.

Proposición 3.9 (Recíproco del Teorema 3.5) Suponga que f satisface la condición 1. Si A es un atractor entonces, f satisface la condición 2.

Demostración. Suponga que f no satisface la condición 2. Por tanto, $f(-a) \leq -a$ y $f(b) \geq b$. Si $f(-a) = -a$ y $f(b) = b$ entonces, $\alpha > 1$ y $\beta > 1$. Por el lema 3.5, $f^n(x) \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$, para todo $x < -a$ y $f^n(x) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ para todo $x > b$. Esto implica que A no satisface la definición 3.1 de atractor. Esto es una contradicción. Si $f(-a) < -a$ o $f(b) > b$ entonces, $f(A) \neq A$, lo que contradice el hecho que A es atractor.

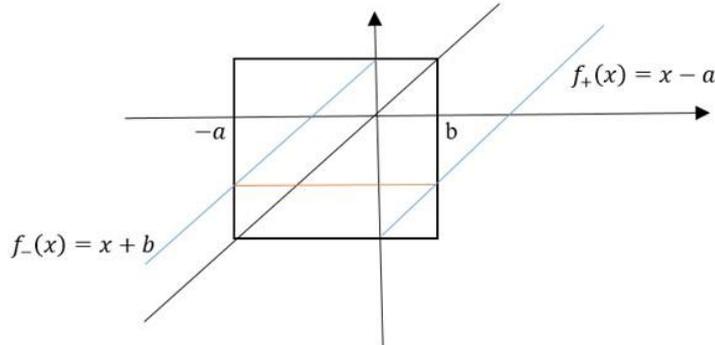


Figura 3: Gráfica de f donde aparece el atractor global, $\alpha = \beta = 1$

3.2. Dinámica y Medidas invariantes del Atractor

Si f satisface la condición 1 y 2, el teorema 3.6 indica que el estudio de la dinámica de f se debe centrar en el estudio de la dinámica del atractor A . En el caso en que $f(b) = b$ se toma \bar{A} como atractor. Parte del estudio de la dinámica de una transformación consiste en describir el comportamiento asintótico de la órbita (el conjunto $\mathcal{O}^+(x, f) = \{x, f^2(x), f^3(x), \dots, \}$) de cada $x \in \mathbb{R}$, como por ejemplo, el conjunto omega-límite $\omega(x, f) = \{y \in \mathbb{R} : \text{existe } n_k \rightarrow +\infty \text{ con } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}$ de un punto $x \in \mathbb{R}$.

En esta sección se mostrará los diferentes valores del parámetro donde la dinámica del atractor de f exhibe un comportamiento no trivial, es decir, f_A es transitivo o f_A admite una medida absolutamente continua a la medida de Lebesgue. Primero comenzamos con la descripción de la dinámica cuando f_A es biyectiva e indicando los valores del parámetro donde esto sucede.

Teorema 3.10 Suponga que f satisface la condición 1 y que $\alpha = \beta = 1$.

- a) Si $\frac{a}{b}$ es racional entonces, existe $n \geq 2$ tal que $f^n(x) = x, \forall x \in A$.
- b) Si $\frac{a}{b}$ es irracional entonces, $\omega(x, f) = \bar{A}$ (clausura de A) para todo $x \in A$, es decir, $\mathcal{O}^+(x, f)$ es denso en \bar{A} .

Demostración. Considere el difeomorfismo $h: [-a, b) \rightarrow [0, 1)$ definida por $h(x) = \frac{x+a}{a+b}$ cuya inversa es $h^{-1}(x) = (a+b)x - a$. Considere la rotación de Poincaré, vista en el intervalo unitario, $R_\delta: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por $R_\delta(x) = (x + \delta) \bmod 1, \alpha \in [0, 1)$, es decir, $R_\delta(x) = \begin{cases} x + \delta & \text{si } x \in [0, 1 - \delta) \\ x + \delta - 1 & \text{si } x \in [1 - \delta, 1) \end{cases}$

Sea $\delta = \frac{b}{a+b}$ y veamos que f restringida a $A = [-a, b)$ es topológicamente conjugada a R_δ , por medio de la conjugación h . Para ello, se debe probar que $hof(x) = R_\delta oh(x)$, para todo $x \in$

A. Si $x \geq 0$ entonces, $h(f(x)) = \frac{x}{a+b}$. Si $x < 0$ entonces, $h(f(x)) = h(x + b) = \frac{x+a+b}{a+b} = \frac{x}{a+b} + 1$. Por otro lado, si $0 \leq x < b$ se tiene que, $1 - \delta \leq h(x) < 1$, por tanto

$$R_\delta(h(x)) = h(x) + \delta - 1 = \frac{x+a}{a+b} + \delta - 1 = \frac{x}{a+b} = h(f(x)).$$

Si $-a \leq x < 0$ entonces, $0 \leq h(x) < 1 - \delta$ y

$$R_\delta(h(x)) = h(x) + \delta = \frac{x+a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{x}{a+b} + 1 = h(f(x)).$$

Se ha demostrado efectivamente que $f|_A: A \rightarrow A$ es topológicamente conjugado a R_α . Si $\frac{a}{b}$ es racional, implica que $\delta = \frac{b}{a+b}$ es racional por la conjugación topológica se obtiene ítem a). Si $\frac{a}{b}$ es irracional, se tiene que

$\delta = \frac{b}{a+b}$ es irracional por la conjugación topológica se obtiene ítem b).

Cuando una transformación es ergódica bajo alguna medida que ella preserva existe una relación con su comportamiento dinámico. Antes de mostrar la existencia de medidas invariantes es necesario que se comience con algunos conceptos de Teoría Ergódica, necesarios para comprender los resultados obtenidos, para ello consideremos (M, μ) un espacio de medida sobre los borelianos \mathcal{B} del espacio topológico M .

Definición 3.11 Una función medible $f: M \rightarrow M$ preserva una medida μ si $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$, para todo conjunto $B \in \mathcal{B}$.

Definición 3.12 Una función medible $f: M \rightarrow M$ que preserva una medida μ es ergódica si para todo conjunto $B \in \mathcal{B}$ con $f(B) \subset B$ se tiene que $\mu(B) = 0$ o $\mu(M \setminus B) = 0$.

Teorema 3.13 Suponga que f satisface la condición 1, $f(-a) = f(b)$ y $\alpha \neq \beta$.

1. Si $\frac{\log(\beta)}{\log(\alpha)}$ es irracional entonces, f_A admite una medida invariante únicamente ergódica equivalente a la medida de Lebesgue.
2. Si $\frac{\log(\beta)}{\log(\alpha)}$ es racional entonces, todos los puntos $x \in A$ son periódicos del mismo periodo para f_A .

Demostración. Considere la función del intervalo unitario $g: [0,1) \rightarrow [0,1)$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} r + \frac{1-r}{s}x & \text{si } 0 \leq x < s \\ \frac{r}{1-s}(x-s) & \text{si } s < x \leq 1 \end{cases}$$

Donde $0 < s < 1$ y $0 < r < 1$. En el trabajo de (Coelho et al., 1995) se prueba que el número de rotación de g es $\rho = \log\left(\frac{r}{1-s}\right) / \log\left(\frac{rs}{(1-s)(1-r)}\right)$. Además, prueban que si ρ es irracional entonces, g admite una medida invariante ergódica equivalente a la de Lebesgue. Para usar este resultado se probará que f_A es topológicamente conjugada a g , por medio de un difeomorfismo $h: [-a, b) \rightarrow [0,1)$ de clase C^∞ definido por $h(x) = \frac{x+a}{a+b}$ donde, $h^{-1}(x) = (a+b)x - a$, $s = \frac{a}{a+b}$ y $r = \frac{ab}{a+b}$. Note que, del hecho $f(-a) = f(b)$, el valor de r así tomado

satisface que $0 < r < 1$. Para probar que $g \circ h(x) = h \circ f(x)$ para todo $x \in [-a, b)$, primero considere $0 \leq x < b$ entonces, $s = \frac{a}{a+b} \leq h(x) < 1$. Por tanto

$$g \circ h(x) = \frac{r}{1-s} (h(x) - s) = \frac{r}{1-s} \left(\frac{a+x}{a+b} - \frac{a}{a+b} \right) = \frac{r}{(1-s)(a+b)} x$$

Por otro lado,

$$h \circ f(x) = \frac{f(x) + a}{a+b} = \frac{\alpha}{a+b} x$$

Al sustituir los valores de $r = \frac{\alpha b}{a+b}$ y $1 - \alpha = \frac{b}{a+b}$ se sigue que

$$\frac{r}{(1-s)(a+b)} = \frac{\alpha}{a+b}$$

Así, $g \circ h(x) = h \circ f(x)$. Ahora, si $-a \leq x < 0$ entonces, $0 \leq h(x) < \frac{a}{a+b} = s$.

$$g \circ h(x) = r + \frac{1-r}{s} \left(\frac{x+a}{a+b} \right) = \frac{1-r}{s(a+b)} x + r + \frac{(1-r)a}{s(a+b)} = \frac{1-r}{s(a+b)} x + 1$$

Por otro lado,

$$h \circ f(x) = \frac{f(x) + a}{a+b} = \frac{\beta x + b + a}{a+b} = \frac{\beta}{a+b} x + 1$$

Al usar el hecho que $f(-a) = f(b)$ y sustituir el valor de $r = \frac{\alpha b}{a+b}$ se sigue que,

$$\frac{1-r}{s(a+b)} = \frac{\beta}{a+b}$$

Esto muestra que $g \circ h(x) = h \circ f(x)$ para todo $x \in [-a, b)$.

Ahora, se observa que $\frac{\log(\beta)}{\log(\alpha)}$ es irracional sí, y solo si, $\frac{\log(\beta)}{\log(\frac{\alpha}{\beta})}$ es irracional. También note que, $\frac{r}{1-s} = \beta$ y $\frac{rs}{(1-s)(1-r)} = \frac{\alpha}{\beta}$. Por tanto, si $\frac{\log(\beta)}{\log(\alpha)}$ es irracional entonces $\rho = \log\left(\frac{r}{1-s}\right) / \log\left(\frac{rs}{(1-s)(1-r)}\right)$ es irracional. Así, g con los valores en los parámetros $s = \frac{a}{a+b}$ y $r = \frac{\alpha b}{a+b}$ preserva una medida ergódica equivalente a la medida de Lebesgue. Entonces, por la conjugación que se encontró f_A admite una medida ergódica equivalente a la medida de Lebesgue.

Por otro lado, si $\frac{\log(\beta)}{\log(\alpha)}$ es racional entonces $\rho = \log\left(\frac{r}{1-s}\right) / \log\left(\frac{rs}{(1-s)(1-r)}\right)$ es racional y en el trabajo de (Coelho et al., 1995) prueban que existe $n > 1$ tal que todo punto $x \in [0,1)$ es periódico de periodo n para g . Por la conjugación todos los punto de $[-a, b)$ son periódicos de periodo n para f_A .

Definición 3.14 Una función $h: I \rightarrow I$ lineal creciente por partes en un intervalo I es **uniformemente expansora** si existe $\lambda > 1$ tal que $h'(x) > \lambda$, para todos los puntos donde la derivada está definida. f_A es **local eventualmente sobre** si para cada intervalo $J \subset [-a, 0)$ o $J \subset (0, b]$ existe $n \geq 1$ tal que $f_A^n(J) = \bar{A}$.

Teorema 3.15 Suponga que f satisface la condición 1, si $f(-a) = -a$ o $f(b) = b$ entonces, f_A admite una única medida invariante ergódica equivalente a la medida de Lebesgue.

Demostración. Caso 1. Suponga que $f(-a) = -a$ y $\alpha > 1$.

Note que por hipótesis $\beta > 1$. Entonces, $f_{\bar{A}}$ satisface las hipótesis del Teorema 5.2.1 (Existencia de medidas invariantes) en (Boyarsky & Góra, 1997) por lo tanto, $f_{\bar{A}}$ admite una única medida invariante absolutamente continua a la de Lebesgue. Del hecho que $\beta > 1$ y $\alpha > 1$, se sigue que, $f_{\bar{A}}$ es uniformemente expansora. Ya que $f(-a) = -a$ se tiene que, $f_{\bar{A}}$ es local eventualmente sobre (o exacta) ver proposición 4 en (Eslami & Góra, 2011).

Caso 2. Suponga que $f(-a) = -a$ y $\alpha \leq 1$.

Considere el mismo homeomorfismos usado en el Teorema 3.10, $h: [-a, b) \rightarrow [0,1)$ definido por $h(x) = \frac{x+a}{a+b}$. Para $p = \frac{a+b}{a}$ y $s = \alpha$ se sigue que f es topológicamente conjugado a la aplicación lineal por partes

$$f_{s,p}(x) = \begin{cases} px, & \text{si } 0 \leq x < 1/p \\ s\left(x - \frac{1}{p}\right), & \text{si } 1/p \leq x < 1 \end{cases}$$

(Barrientos, 2015) prueba que $f_{s,p}$ es eventualmente expansora para $0 < s \leq 1 < p$, esto implica que $f_{s,p}$ satisface las hipótesis del Teorema 5.2.1 dado en (Boyarsky & Góra, 1997) por lo tanto, $f_{\bar{A}}$ admite una única medida invariante absolutamente continua a la de Lebesgue.

En ambos casos $f_{\bar{A}}$ es local eventualmente sobre, esto implica que $f_{\bar{A}}$ es transitiva ver (Glendinning & Jeffrey, 2019). Si $f_{\bar{A}}$ es transitiva y admite una única medida invariante absolutamente continua a la de Lebesgue, es bien conocido que esta medida es equivalente a la medida de Lebesgue y además ergódica, ver sección 4.3 de (Viana & Oliveira, 2016) y (GÓRA, 2009).

Caso 3. Suponga que $f(b) = b$ y $\beta > 1$.

Caso 4. Suponga que $f(b) = b$ y $\beta \leq 1$.

Ambos casos son análogos a los casos 1 y 2 respectivamente.

Proposición 3.16 Suponga que f satisface la condición 1 y 2, si $f(-a) < f(b)$ entonces, $f_{\bar{A}}$ admite una única medida invariante absolutamente continua a la medida de Lebesgue.

Demostración.

Considere el homeomorfismos usado en el Teorema 3.10, $h: [-a, b) \rightarrow [0,1)$ definido por $h(x) = \frac{x+a}{a+b}$. Esta función h es una conjugación topológica entre f y la aplicación lineal por partes de tres parámetros

$$f_{r,s,t}(x) = \begin{cases} rx + 1 - rt, & \text{si } 0 \leq x < t \\ s(x - t), & \text{si } t \leq x < 1 \end{cases}$$

para $t = \frac{a}{a+b}$, $s = \alpha$ y $r = \beta$. Por lo tanto, $f_{r,s,t}(h(x)) = h(f(x))$ para todo $x \in A = [-a, b)$. En el trabajo de (Ding et al., 2010) se prueba que si $f_{r,s,t}(0) < f_{r,s,t}(1)$ entonces, $f_{r,s,t}$ admite una única medida invariante absolutamente continua a la medida de Lebesgue. Usando el hecho que $f(-a) < f(b)$ se tiene que

$$f_{r,s,t}(0) = f_{r,s,t}(h(-a)) = h(f(-a)) < h(f(b)) = f_{r,s,t}(h(b)) = f_{r,s,t}(1)$$

Lo que muestra que la $f_{r,s,t}$ conjugada a f con los parámetros dados anteriormente admite una única medida invariante absolutamente continua a la de Lebesgue, por lo tanto, por la conjugación f admite una medida del mismo tipo.

4. Discusión

De la demostración del teorema 3.10 se ve que la dinámica del atractor global de f para $\alpha = \beta = 1$ es equivalente a la famosa dinámica de la rotación del círculo, esto es muy interesante ya que por lo general este tipo de dinámica aparece en variedades diferenciables sin frontera con dimensión mayor o igual a 2 y no en espacios unidimensionales como el caso de la recta real.

El Teorema 3.10 muestra el comportamiento dinámico desde un punto de vista topológico para el caso $\alpha = \beta = 1$. En los resultados presentados en el trabajo no se muestra la medida invariante para el atractor global en este caso. Justamente la medida de Lebesgue es la medida invariante en este caso, la cual es la únicamente ergódica, es decir, es la única medida invariante para f_A y además es ergódica. La última afirmación se puede ver en (Viana & Oliveira, 2016).

Si f satisface la condición 1, note que del hecho que $f(-a) = -a$ hace que $\beta > 1$ y del hecho que $f(b) = b$ hace que $\alpha > 1$. Si la función satisface una de esas dos condiciones, por la proposición 3.16 f_A admite una medida invariante ergódica equivalente a la medida de Lebesgue. Conseguir medidas invariantes equivalentes a la medida de Lebesgue por lo general no es fácil, inclusive en el caso uniformemente expansor, como por ejemplo en nuestro caso donde $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $f(-a) > -a$ y $f(b) < b$ (ver figura 3). De hecho, (William Parry, 1979) prueba que en el caso simétrico de f con $\alpha = \beta$ y $a = b$, la medida absolutamente continua a la medida de Lebesgue asociada a la dinámica del atractor f_A (que existe por la proposición 3.16) no es equivalente a la medida de Lebesgue sí, y solo si, $1 < \alpha < \sqrt{2}$.

5. Conclusiones

Al observar la existencia del atractor global de f para los parámetros $\alpha = \beta = 1$ la función f no posee puntos fijos. Se puede concluir que para extender el resultado de la existencia de atractor global para funciones no lineales una condición necesaria es que no admita puntos fijos.

La condición 1 ($-a \leq f(-a) \leq f(b) \leq b$) es necesaria para que el conjunto $A = [-a, b)$ sea atractor de f , pues si $f(-a) > f(b)$ entonces, $f(A)$ está propiamente contenido en A . Por lo tanto, dentro del conjunto A hay un conjunto atractor, el cual no fue estudiado en este trabajo.

Si f satisface la condición 1, $-a < f(-a)$ y $f(b) < b$, del lema 3.7 y el Teorema 3.6 se concluye que, existen dos puntos fijos $q < 0$ y $p > 0$ tales que la bacía de atracción del atractor A es igual al intervalo $[q, p]$. Note que, en este caso $q < -a < 0 < b < p$.

Del hecho que f_A sea transitivo implica que el conjunto A es un atractor topológico. Si f_A no es transitivo no significa que no existe atractor topológico para f . De hecho, si f satisface

la condición 1 y 2, $\alpha > 1$ y $\beta > 1$; se tiene que f_A satisface las condiciones dadas para la existencia de atractores topológicos probado en (Morales & Pujals, 1997) y ver (Choi, 2004) para la estructura del conjunto de puntos periódicos del atractor topológico. De estos dos trabajos aplicados a f_A concluimos que:

Teorema 5.1. Suponga que f satisface la condición 1 y 2, $\alpha > 1$ y $\beta > 1$. Si f_A no es transitivo entonces existe un conjunto compacto $\Lambda_f \subset A$ tal que Λ_f es un atractor topológico para f y además, el conjunto de puntos periódicos de f es denso en Λ_f .

Si a las hipótesis del proposición 3.16 se le agrega la condición 2 esto implica que A es un atractor topológico. Del ítem 3 del capítulo 5 de Discusión, se concluye: para f con $\alpha = \beta$ y $a = b$, el conjunto A es atractor topológico sí, y solo si, $\alpha \geq \sqrt{2}$.

Contribución de Autores

En concordancia con la taxonomía establecida internacionalmente para la asignación de créditos a autores de artículos científicos (<https://casrai.org/credit/>). Los autores declaran sus contribuciones en la siguiente matriz:

	Iñiguez, A.	Ruiz, B.
Conceptualización		
Análisis Formal		
Investigación		
Metodología		
Recursos		
Validación		
Redacción – revisión y edición		

Conflicto de Interés

Los autores declaramos que no existen conflictos de interés de naturaleza alguna.

Referencias

- Avrutin, V., Gardini, L., Schanz, M., & Sushko, I. (2014). Bifurcations of Chaotic Attractors in One-Dimensional Piecewise Smooth Maps. *Http://Dx.Doi.Org/10.1142/S0218127414400124*, 24(8).
- Avrutin, V., Schanz, M., & Banerjee, S. (2006). Multi-parametric bifurcations in a piecewise-linear discontinuous map. *Nonlinearity*, 19(8), 1875. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/8/007>
- Banerjee, S., & Verghese, G. C. (2001). *Nonlinear phenomena in power electronics : attractors, bifurcations, chaos, and nonlinear control*. 441.
- Barrientos, P. G. (2015). A Family of Eventually Expanding Piecewise Linear Maps of the Interval. *The American Mathematical Monthly*, 122(7), 674–680. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.7.674>

- Belyaev, A., & Ryazanova, T. (2019). Stochastic sensitivity of attractors for a piecewise smooth neuron model. *https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1678596*, 25(9–10), 1468–1487. <https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1678596>
- Boyarsky, A., & Góra, P. (1997). *Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*. 420. <http://www.amazon.co.uk/Laws-Chaos-Invariant-Probability-Applications/dp/0817640037>
- Choi, Y. (2004). Attractors from one dimensional lorenz-like maps. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 11(2–3), 715–730. <https://doi.org/10.3934/DCDS.2004.11.715>
- Coelho, Z., Lopes, A., & da Rocha, L. F. (1995). Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(11), 3533–3533. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1995-1322918-6>
- Du, R. H., Wang, S. J., Jin, T., & Qu, S. X. (2018). Phase order in one-dimensional piecewise linear discontinuous map. *Chinese Physics B*, 27(10), 100502. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/10/100502>
- Eslami, P., & Góra, P. (2011). On eventually expanding maps of the interval. *American Mathematical Monthly*, 118(7), 629–635. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.07.629>
- Glendinning, P., & Jeffrey, M. R. (2019). *An Introduction to Piecewise Smooth Dynamics*. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-23689-2>
- GÓRA, P. (2009). Invariant densities for piecewise linear maps of the unit interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 29(5), 1549–1583. <https://doi.org/10.1017/S0143385708000801>
- Jain, P., & Banerjee, S. (2003). Border-collision bifurcations in one-dimensional discontinuous maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 13(11), 3341–3351. <https://doi.org/10.1142/S02181274030008533>
- Milnor, J. (1985). On the concept of attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 99(2), 177–195. <https://doi.org/10.1007/BF01212280>
- Morales, C. A., & Pujals, E. R. (1997). Singular strange attractors on the boundary of Morse-Smale systems. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 30(6), 693–717. [https://doi.org/10.1016/S0012-9593\(97\)89936-3](https://doi.org/10.1016/S0012-9593(97)89936-3)
- NUSSE, H. E., & YORKE, J. A. (1995). BORDER-COLLISION BIFURCATIONS FOR PIECEWISE SMOOTH ONE-DIMENSIONAL MAPS. *http://dx.doi.org/10.1142/S0218127495000156*, 05(01), 189–207. <https://doi.org/10.1142/S0218127495000156>
- Parry, W. (1964). Representations for real numbers. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 15(1–2), 95–105. <https://doi.org/10.1007/BF01897025>
- Parry, William. (1979). The lorenz attractor and a related population model. *Ergodic Theory. Lecture Notes in Mathematics*, 729, 169–187. <https://doi.org/10.1007/BFB0063293>
- Rajpathak, B., Pillai, H. K., & Bandyopadhyay, S. (2012). Analysis of stable periodic orbits in the one dimensional linear piecewise-smooth discontinuous map. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, 22(3), 033126. <https://doi.org/10.1063/1.4740061>
- Rajpathak, B., Pillai, H. K., & Bandyopadhyay, S. (2015). Analysis of unstable periodic orbits and chaotic orbits in the one-dimensional linear piecewise-smooth discontinuous map. *Chaos*, 25(10). <https://doi.org/10.1063/1.4929382>

- Rényi, A. (1957). Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 8(3–4), 477–493. <https://doi.org/10.1007/BF02020331>
- Tramontana, F., & Gardini, L. (2011). Border collision bifurcations in discontinuous one-dimensional linear-hyperbolic maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3), 1414–1423. <https://doi.org/10.1016/J.CNSNS.2010.06.012>
- Viana, M., & Oliveira, K. (2016). Foundations of Ergodic Theory. *Foundations of Ergodic Theory*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781316422601>
- Wilkinson, K. M. (1974). Ergodic properties of certain linear mod one transformations. *Advances in Math.*, 14, 64–72.