Novasinergia
Revista digital de ciencia, ingeniería y tecnología

Unach
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Artículo de Investigación

Teorema de punto fijo común para funciones ocasionalmente débilmente compatibles satisfaciendo una condición contractiva con alteración de distancia

Common fixed point theorem for occasionally weakly compatible maps satisfying a contractive condition with altering distance

Orlin Rivas[1*], Wilmer Barrera[2]

[1]*Instituto de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador, 130105.*

[2]*Instituto de Ciencias Básicas, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador, 130105; wilmer.barrera@utm.edu.ec*

*Correspondencia: orly1868@hotmail.com

Citación: Rivas, O., & Barrera, W., (2022). Teorema de punto fijo común para funciones ocasionalmente débilmente compatibles satisfaciendo una condición contractiva con alteración de distancia. *Novasinergia.* 5(2). 23-32.

https://doi.org/10.37135/ns.01.10.02

Recibido: 21 abril 2022
Aceptado: 08 junio 2022
Publicación: 05 julio 2022

Novasinergia
ISSN: 2631-2654

Copyright: 2022 derechos otorgados por los autores a Novasinergia.
Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos y condiciones de una licencia de Creative Commons Attribution (CC BY NC). (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Resumen: El propósito de este artículo es establecer condiciones que garantizan existencia y unicidad de punto fijo en común para un par de funciones definidas sobre un espacio métrico, satisfaciendo un tipo de desigualdad contractiva que involucra funciones que alteran distancia. Para lograr nuestro resultado, usamos algunas de las nociones que generalizan la propiedad de conmutatividad de funciones, como, por ejemplo, funciones ocasionalmente débilmente compatibles. Finalizamos mostrando que, si $f, g: (X, d) \longrightarrow (X, d)$ son funciones ocasionalmente débilmente compatibles con al menos un punto de coincidencia, para las cuales se cumple la siguiente desigualdad contractiva: $\psi\Big(d\big(g(x), g(y)\big)\Big) \leq \alpha\Big(d\big(f(x), f(y)\big)\Big) \cdot \psi\Big(d\big(f(x), f(y)\big)\Big)$, $\forall\, x, y \in X$, siendo $\alpha: \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1)$ una función y ψ una función que altera distancia, entonces f y g tienen un único punto fijo en común. Este resultado generaliza algunos teoremas de punto fijo en común que no requieren ninguna condición de continuidad de las funciones ni de la completitud del espacio métrico.

Palabras clave: Conmutatividad, función que altera distancia, funciones ocasionalmente débilmente compatibles, propiedad E.A, punto fijo en común.

Abstract: *This paper aims to establish conditions that guarantee the existence and uniqueness of a common fixed point for a pair of functions defined on a metric space, satisfying a type of contractive inequality involving distance-altering functions. We use some weaker forms of commuting maps to achieve our results, concretely, occasionally weakly compatible maps. We prove that if* $f, g: (X, d) \longrightarrow (X, d)$ *are occasionally weakly compatible maps with a coincident point such that* $\psi\Big(d\big(g(x), g(y)\big)\Big) \leq \alpha\Big(d\big(f(x), f(y)\big)\Big) \cdot \psi\Big(d\big(f(x), f(y)\big)\Big)$, $\forall\, x, y \in X$ *where* $\alpha: \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1)$ *and* ψ *is an altering distance function, then* f *and* g *have a unique common fixed point. This result generalizes some theorems of common fixed points where neither the continuity of maps nor the completeness of the metric space is required.*

Keywords: *Common fixed point, commutativity, occasionally weakly compatible map, altering distance function, E.A. property.*

1. Introducción

La teoría del punto fijo es una de las herramientas más importantes del análisis matemático que ha sido crucial en el desarrollo de varias áreas de la matemática como ecuaciones diferenciales, teoría de juegos, teoría de fractales, economía, teoría de optimización, teoría de aproximación, ecuaciones integrales, entre otras. En el año 1922 se inicia el estudio de la Teoría Métrica del Punto fijo con el resultado que se introduce en Banach (1922). El Principio de Contracción de Banach ha sido generalizado considerando nuevos tipos de condiciones contractivas y, en otros casos, debilitando las condiciones sobre el espacio en el cual está definida la función. Es así como aparecieron varios resultados en esta línea, como por ejemplo, los avances dados por Rakotch, Kannan, Chatterjea, Ciric, como se estudia en Olatinwo & Ishola (2018); la introducción de las funciones que alteran distancia por Khan, Swaleh, & Sessa (1984) y el uso de las desigualdades contractivas de tipo integral por Branciari (2002).

En 1976 comienza a crecer el interés por la investigación sobre puntos fijos en común para un par o familias de aplicaciones. Uno de los resultados importantes en esta línea es presentado en Jungck (1976), donde proporciona condiciones sobre un par de funciones definidas en un espacio métrico completo para garantizar existencia y unicidad de punto fijo en común mediante el uso de la conmutatividad bajo ciertas condiciones contractivas. El desarrollo de esta teoría tuvo auge cuando las investigaciones se enfocaron en el estudio de nuevas condiciones contractivas y de conmutatividad.

Inicialmente, la propiedad de conmutatividad fue usada en Jungck (1976), dando respuesta a un problema de punto fijo en común que se mantenía abierto para la época y generalizando de esta forma el principio de contracción de Banach. Esta propiedad fue ampliamente generalizada por varios autores con el fin de obtener nuevos resultados de puntos fijos, con lo cual aparecieron las nociones de; funciones débilmente conmutativas, ver Singh & Tomar (2003), funciones compatibles en Jungck (1986), funciones R-débilmente conmutativas, ver Singh & Tomar (2003), funciones débilmente compatibles en Jungck & Rhoades (1998) funciones ocasionalmente débilmente compatibles en AL-Thagafi & Shahzad (2008), entre otras. Un estudio exhaustivo acerca de las relaciones sobre algunos de estos conceptos fue publicado en Singh & Tomar (2003).

En lo que sigue, $\mathbb{N}$ representará el conjunto de los números naturales (comenzando desde 1) y $C(f,g)$ es el conjunto de todos los puntos donde f y g coinciden, esto es $C(f,g)=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$. Si $f(x)=g(x)=w$, llamaremos a x punto coincidente de f y g, mientras que w es llamado punto de coincidencia de f y g.

Definición 1.1. Sean $f,g: X\longrightarrow X$ dos funciones. Un punto $z\in X$ es llamado punto fijo en común de f y g si $f(z)=g(z)=z$.

Una versión de la noción de función de control ha sido llamada función que altera distancia, la cual fue introducida en Khan, Swaleh, & Sessa (1984) y usada para probar un teorema de punto fijo de una función, lo cual generalizo el principio de contracción de Banach.

Definición 1.2. Una función $\psi: [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, es llamada una función que altera distancia, si cumplen las siguientes condiciones:

1. ψ es una función continua y no decreciente.
2. $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Se denota por Ψ al conjunto de todas las funciones que alteran distancia.

La siguiente definición fue dada en Jungck (1986).

Definición 1.3. Diremos que las funciones f y g son aplicaciones compatibles en un espacio métrico (X, d), si $\lim_{n\to\infty} d\left(f\big(g(x_n)\big), g\big(f(x_n)\big)\right) = 0$, siempre que $(x_n)_n$ sea una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$.

En Morales & Rojas (2012), los autores usaron esta noción para establecer condiciones que garantizan la existencia y unicidad de punto fijo en común para dos funciones sobre un espacio métrico completo. Lo interesante de este resultado es que, entre las hipótesis, se pide que las funciones satisfagan una desigualdad contractiva que involucra funciones que alteran la distancia y así, el teorema constituye la primera aparición de este tipo de funciones en la teoría de punto fijo en común. De esta forma se generalizó y se extendió el teorema principal dado en Jungck (1976). Enunciamos a continuación el teorema dado por Morales & Rojas (2012), el cual es importante en nuestra investigación.

Teorema 1.4. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f, g: X \longrightarrow X$ dos funciones satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) f es una función continua,
(ii) $g(X) \subset f(X)$,
(iii)f, g son funciones compatibles,
*(iv)*existe un número $0 \le q < 1$ tal que

$$\psi[d(gx, gy)] \le q \cdot \psi[d(fx, fy)], \quad \forall x, y \in X.$$

Entonces, f y g tienen un único punto fijo en común.

Una condición necesaria para la no compatibilidad fue dada en Aamri & El Moutawakil (2002), llamada

Propiedad E. A.

Definición 1.5. Diremos que las funciones f y g definidas sobre un espacio métrico (X, d), son aplicaciones que satisfacen la propiedad E.A., si existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$.

En 1998, se extendió la noción de compatibilidad mediante el concepto de funciones débilmente compatibles, publicada en Jungck & Rhoades (1998).

Definición 1.7. Diremos que f y g son aplicaciones débilmente compatibles si $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$, para todo $x \in C(f, g)$.

En AL-Thagafi & Shahzad (2008), los autores debilitaron la Definición 1.6 a través de la siguiente noción.

Definición 1.8. Diremos que f y g son aplicaciones ocasionalmente débilmente compatibles si existe $t \in C(f,g)$ tal que $f(g(t)) = g(f(t))$.

El siguiente resultado fue probado en Kumar (2010), el cual generaliza el teorema del punto fijo de Jungck sin requerimiento de continuidad en las funciones, debilitando las contenciones entre los rangos y, además, no se pide completitud del espacio métrico.

Teorema 1.9. Sean (X,d) un espacio métrico y $f,g: X \longrightarrow X$ dos funciones satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) f *y* g cumplen la propiedad E. A.,
(ii) existe un número $0 \leq q < 1$ tal que
$$d(gx,gy) \leq qd(fx,fy), \forall x,y \in X,$$
(iii) $f(X)$ es un subespacio cerrado de X,
(iv) f *y* g son débilmente compatibles.

Entonces, f y g tienen un único punto fijo en común.

En este ámbito, el resultado anterior constituye uno de los primeros estudios de punto fijo en común para funciones definidas en espacios métricos no necesariamente completos, usando la desigualdad contractiva dada en Jungck (1976).

Proposición 1.10. Sea $\alpha: \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ una función. Si $(x_n)_n$ es una sucesión en $\mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces
$$\limsup_{n\to\infty} \alpha(x_n) \leq \limsup_{t\to a} \alpha(t).$$
Recientemente en Barrera (2021), se prueba un teorema de punto fijo en común para dos funciones compatibles definidas sobre un espacio métrico completo, satisfaciendo una desigualdad contractiva que además de usar funciones que alteran distancia, reemplaza la constante de contracción por una función. Este resultado establece lo siguiente.

Teorema 1.11. Sean (X,d) un espacio métrico completo y $f,g: X \longrightarrow X$ dos funciones satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $g(X) \subset f(X)$,
(ii) f es una función continua,
(iii) existe una función $\alpha: \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1)$ con $\limsup_{t\to a} \alpha(t) < 1$ para todo $a > 0$ y $\psi \in \Psi$, tal que
$$\psi\left(d(g(x),g(y))\right) \leq \alpha\left(d(f(x),f(y))\right) \cdot \psi\left(d(f(x),f(y))\right), \forall x,y \in X,$$
(iv) f,g son funciones compatibles.

Entonces, f y g tienen un único punto fijo en común.

El objetivo de este trabajo es extender la teoría del punto fijo en común para funciones definidas sobre un espacio métrico no necesariamente completo, usando desigualdades contractivas que dependen de funciones que alteran la distancia entre puntos.

2. Metodología

Con el objetivo de obtener punto fijo en común para dos funciones siguiendo la línea de investigación iniciada en Jungck (1976), considerando espacios métricos no completos, en la revisión bibliográfica se pudo constatar que en Kumar (2010) se da el primer paso exitoso con un aporte bastante interesante. En cuanto al uso de las funciones que alteran la distancia, en este ámbito no existen resultados que garanticen existencia y unicidad de punto fijo en común. Lo más cercano a nuestro problema planteado, ha sido publicado en Morales & Rojas (2012), quienes fueron los primeros autores en obtener condiciones que garantizan punto fijo en común para un par de funciones definidas sobre un espacio métrico completo, satisfaciendo una condición contractiva que involucra funciones que alteran distancia.

Por otra parte, en Kumar (2010) los autores utilizaron la desigualdad contractiva dada en Jungck (1976), junto con las nociones que extienden la conmutatividad, como lo es el caso de la compatibilidad débil. Así mismo, la propiedad E. A., es requerida y permite eliminar la completitud del espacio. Por lo tanto, con esas condiciones fue natural no requerir contención entre los rangos, lo que significó un avance significativo respecto al resultado principal de Jungck (1976).

Para obtener el resultado principal de este trabajo, se usó lo hecho en Kumar (2010) para funciones débilmente compatibles en espacios métricos satisfaciendo la propiedad E. A., lo hecho en Morales & Rojas (2012), para desigualdades contractivas dependientes de una función que altera la distancia y lo hecho en Barrera (2021), considerando una función como parámetro contractivo en la desigualdad contractiva, de tal forma de adaptarlo a nuestro caso mediante el uso de funciones ocasionalmente débilmente compatibles. En otras palabras, combinamos las ideas del Teorema 1.4, Teorema 1.9 y del Teorema 1.11, para alcanzar el objetivo de esta investigación.

3. Resultados y Discusión

En lo que sigue se enuncia y se demuestra el teorema mediante el cual se alcanzó el objetivo de este trabajo de investigación. El resultado garantiza la existencia y unicidad de punto fijo en común para dos funciones ocasionalmente débilmente compatibles, satisfaciendo una condición contractiva que involucra funciones que alteran distancia, cuya constante de contracción se ha reemplazado por una función. Como consecuencia, se extendió el teorema 2 de Kumar (2010).

A continuación, presentamos el aporte principal de esta investigación a través del siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sean (X, d) un espacio métrico, $f, g: X \longrightarrow X$ dos funciones y $\psi \in \Psi$. Suponga que,

(i) Existe una función $\alpha: \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1)$ tal que,
$$\psi\left(d\big(g(x), g(y)\big)\right) \leq \alpha\left(d\big(f(x), f(y)\big)\right) \cdot \psi\left(d\big(f(x), f(y)\big)\right), \quad \forall x, y \in X.$$

(ii) f y g son funciones ocasionalmente débilmente compatibles.

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración. Dado que f y g son funciones ocasionalmente débilmente compatibles, entonces existe $z \in C(f, g)$ tal que $f\big(g(z)\big) = g\big(f(z)\big)$. Esto implica que $f\big(g(z)\big) = g\big(f(z)\big) = g\big(g(z)\big)$. Por lo tanto,

$$f\big(g(z)\big) = g\big(g(z)\big). \tag{1}$$

Ahora bien, de *(i),* (1) y tomando en cuenta que $z \in C(f,g)$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \psi\left(d\left(g\big(g(z)\big),g(z)\right)\right) &\leq \alpha\left(d\left(f\big(g(z)\big),f(z)\right)\right)\cdot\psi\left(d\left(f\big(g(z)\big),f(z)\right)\right) \\ &= \alpha\left(d\big(g\big(g(z)\big),g(z)\big)\right)\cdot\psi\left(d\left(g\big(g(z)\big),g(z)\right)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\left(1-\alpha\left(d\left(g\big(g(z)\big),g(z)\right)\right)\right)\cdot\psi\left(d\left(g\big(g(z)\big),g(z)\right)\right)\leq 0.$$

Por las propiedades de las funciones α y ψ, se obtiene a partir de (2) que,

$$\psi\left(d\left(g\big(g(z)\big),g(z)\right)\right) = 0,$$

por lo tanto

$$d\big(g\big(g(z)\big),g(z)\big) = 0,$$

Así, es claro que

$$g\big(g(z)\big) = g(z). \tag{3}$$

Luego, de (1) y (3) se sigue

$$f\big(g(z)\big) = g\big(g(z)\big) = g(z), \tag{4}$$

es decir, $t = g(z)$ es un punto fijo en común para f y g. En lo que sigue, se verifica que t es el único punto que satisface (4).

En efecto, supongamos que existe $y \in X$ tal que $f(y) = y = g(y)$. A partir de *(i)* se tiene que

$$\begin{aligned} \psi\big(d(y,t)\big) = \psi\left(d\big(g(y),g(t)\big)\right) &\leq \alpha\left(d\big(f(y),f(t)\big)\right)\cdot\psi\left(d\big(f(y),f(t)\big)\right) \\ &= \alpha\big(d(y,t)\big)\cdot\psi\big(d(y,t)\big) \end{aligned}$$

$$\Big(1-\alpha\big(d(y,t)\big)\Big)\cdot\psi\big(d(y,t)\big)\leq 0.$$

Por lo tanto, $\psi\big(d(y,t)\big) = 0$.

$$\psi\big(d(y,t)\big) = 0.$$

Así, obtenemos que $d(y,t) = 0$, es decir, $y = t$. Por lo tanto, $t = g(z)$ es el único punto fijo en común para f y g.

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 3.1 y constituye una generalización del Teorema 2 de Kumar (2010).

Teorema 3.2. Sean (X,d) un espacio métrico, $f,g\colon X \longrightarrow X$ dos funciones y $\psi \in \Psi$. Suponga que,

(i) $f(X)$ es un subespacio cerrado de X,

(ii) existe una función $\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ con $\limsup\limits_{t\to a} \alpha(t) < 1$ para cada a > 0 tal que,

$$\psi\left(d\big(g(x),g(y)\big)\right)\leq\alpha\left(d\big(f(x),f(y)\big)\right)\cdot\psi\left(d\big(f(x),f(y)\big)\right),\qquad \forall x,y\in X,$$

(iii) f *y* g satisfacen la propiedad E.A.,

(iv) f *y* g son débilmente compatibles.

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Dado que f y g satisfacen la propiedad E.A., entonces existe una sucesión $(x_n)_n \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$. Como $f(X)$ es un subespacio cerrado de X, entonces $t \in f(X)$, es decir, existe $a \in X$ tal que,

$$t = f(a). \tag{5}$$

Ahora bien, probemos que $f(a) = g(a)$. En efecto, de *(ii)* se sigue que,

$$\psi\left(d\big(g(a), g(x_n)\big)\right) \leq \alpha\left(d\big(f(a), f(x_n)\big)\right) \cdot \psi\left(d\big(f(a), f(x_n)\big)\right), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (6), usando la continuidad de ψ y la Proposición 1.10, se tiene que

$$\psi\big(d(g(a), t)\big) \leq \limsup_{t \to 0} \alpha(t) \cdot \psi\big(d(f(a), t)\big) < \psi\big(d(f(a), t)\big) = 0,$$

por lo tanto,

$$\psi\big(d(g(a), t)\big) = 0,$$

es decir,

$$d(g(a), t) = 0.$$

Esto implica que $g(a) = t = f(a)$ y así, $a \in C(f, g)$. Ahora bien, dado que f y g son débilmente compatibles, entonces $f\big(g(a)\big) = g\big(f(a)\big)$, es decir, f y g son funciones ocasionalmente débilmente compatibles. De esta forma se cumplen las condiciones del Teorema 3.1, con lo cual se concluye que f y g tienen un único punto fijo en común, siendo en este caso, t.

Una de las consecuencias del resultado anterior es dada por el siguiente corolario, el cual es precisamente el Teorema 2 probado en Kumar (2010).

Corolario 3.3. Sean (X, d) un espacio métrico, $f, g: X \longrightarrow X$ dos funciones satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) f y g cumplen la propiedad E.A.,
(ii) existe un número $0 \leq q < 1$ tal que

$$d(gx, gy) \leq q d(fx, fy), \forall x, y \in X,$$

(iii) $f(x)$ es un subespacio cerrado de X,
(iv) f y g son débilmente compatibles.
Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.
Demostración: Esta es una consecuencia inmediata del Teorema 3.2, considerando

$$\psi(t) = t, \quad \forall\, t \in [0, +\infty),$$
$$\alpha(t) = k, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

El siguiente ejemplo muestra la importancia del Teorema 3.1 con respecto al Corolario 3.3.

Ejemplo 3.4 Sea $X = [0, +\infty)$ dotado con la métrica usual y consideremos las funciones, $f, g: X \longrightarrow X$ definidas por

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \quad g(x) = \frac{x}{2 + x}.$$

Sea $\alpha: \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ definida como sigue,

$$\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & t = 0, \\ \dfrac{4}{(2 + t)^2}, & t > 0, \end{cases}$$

y considere $\psi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por la fórmula $\psi(t) = t^2$. Es sencillo ver que $f\big(g(0)\big) = g\big(f(0)\big)$ y así, f y g son funciones ocasionalmente débilmente compatibles. Ahora, note que

$$\psi(|g(x) - g(y)|) = \frac{4|x - y|^2}{(2 + x)^2(2 + y)^2},$$

$$\psi(|f(x)-f(y)|)=\frac{1}{4}|x-y|^2,$$

y si $|f(x)-f(y)|\neq 0$, entonces

$$\alpha(|f(x)-f(y)|)=\frac{4}{\left(2+\frac{1}{2}|x-y|\right)^2}.$$

Ya que $X=[0,+\infty)$, entonces para todo $x,y\in X$ tenemos que $|x-y|\leq 2(x+y)$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}4+|x-y|&\leq 4+2(x+y)+xy\\&=(2+x)(2+y),\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}&2\left(2+\frac{1}{2}|x-y|\right)\leq(2+x)(2+y),\\ \Rightarrow\quad &\frac{2}{(2+x)(2+y)}\leq\frac{1}{2+\frac{1}{2}|x-y|},\\ \Rightarrow\quad &\frac{4}{(2+x)^2(2+y)^2}\leq\frac{1}{\left(2+\frac{1}{2}|x-y|\right)^2},\\ \Rightarrow\quad &\frac{4|x-y|^2}{(2+x)^2(2+y)^2}\leq\frac{4}{\left(2+\frac{1}{2}|x-y|\right)^2}\cdot\frac{1}{4}|x-y|^2.\end{aligned}\tag{7}$$

Así, es claro que (7) es equivalente a,

$$\psi\left(d\big(g(x),g(y)\big)\right)\leq\alpha\left(d\big(f(x),f(y)\big)\right)\cdot\psi\left(d\big(f(x),f(y)\big)\right),\qquad\forall x,y\in X.$$

Por lo tanto, se cumplen todas las hipótesis del Teorema 3.1 con lo cual se concluye que f y g tienen un único punto fijo en común, $x=0$.
Por otro lado, no es posible aplicar el Corolario 3.3 para demostrar que f y g tienen punto fijo en común en X, ya que,

$$|g(x)-g(y)|=\frac{2\cdot|x-y|}{(2+x)(2+y)}\leq\frac{2|x-y|}{4}=|f(x)-f(y)|,$$

es decir,

$$|g(x)-g(y)|\leq|f(x)-f(y)|.$$

Por lo tanto, no se cumple la condición (iii).

El Teorema 3.1 da condiciones mínimas requeridas para garantizar que un par de funciones definidas sobre un espacio métrico tenga un único punto fijo en común. Con este resultado se logró un aporte novedoso a la teoría métrica de punto fijo en común a través del Teorema 3.2 para funciones definidas sobre un espacio métrico no necesariamente completo, satisfaciendo una desigualdad contractiva dependiente de una función que altera distancia y considerando una función como parámetro contractivo.

4. Conclusiones

El interés por el estudio de la teoría del punto fijo para dos funciones radica entre otros aspectos, en minimizar las condiciones (tanto de las funciones, como del espacio donde se encuentran definidas), que garantizan existencia y unicidad de punto fijo en común. En Kumar (2010), se observa que, una de las condiciones esenciales que deben cumplir un par de funciones para garantizar punto fijo en común, es la verificación de algún tipo de desigualdad contractiva, las cuales, en la mayoría de los casos, tienen como parámetro contractivo una constante. En este trabajo se hizo un aporte significativo a la teoría métrica del punto fijo al usar una desigualdad contractiva dependiente de funciones que alteran la distancia entre puntos y, cuyo parámetro de contracción, depende de una función. Esto permite manejar con mayor grado de libertad el acercamiento al punto fijo (cuando existe). Notamos que estructuras del espacio como completitud e incluso, propiedades de las funciones como, conmutatividad, continuidad o contención entre los rangos, no fueron requeridas para la obtención del resultado. Por lo tanto, podemos afirmar que con esta investigación se ponen de manifiesto condiciones mínimas para garantizar existencia y unicidad de punto fijo en común para un par de funciones.

Actualmente existen otras estructuras métricas como, por ejemplo, espacios con ω-distancia, donde también sería interesante realizar estos mismos estudios.

Contribuciones de los autores

En concordancia con la taxonomía establecida internacionalmente para la asignación de créditos a autores de artículos científicos (https://casrai.org/credit/). Los autores declaran sus contribuciones en la siguiente matriz:

	Rivas, O.	Barrera, W.
Conceptualización		
Análisis formal		
Investigación		
Metodología		
Recursos		
Validación		
Redacción – revisión y edición		

Conflicto de Interés

Los autores declaramos que no existe ningún tipo de Conflicto de Interés en este trabajo.

Referencias

Aamri, M., & El Moutawakil, D. (2002). Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 270*(1), 181–188. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00059-8

AL-Thagafi, M., & Shahzad, N. (2008). Generalized i-nonexpansive selfmaps and invariant approximations. *Acta Mathematica Sinica, English Series, 24*(5), 867-876. https://doi.org/10.1007/s10114-007-5598-x

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *EuDML, 3*(1), 133–181. https://eudml.org/doc/213289

Barrera, W. (2021). A common fixed point theorem for compatible mappings satisfying a contractive condition involving. *Bulletin of Computational Applied Mathematics, 9*(2), 3–57. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03571046

Branciari, A. (2002). A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *29*(9), 531–536. https://doi.org/10.1155/S0161171202007524

Jungck, G. (1976). Commuting mappings and fixed points. *The American Mathematical Monthly*, *83*(4), 261–263. https://doi.org/10.2307/2318216

Jungck, G. (1986). Compatible mappings and common fixed points. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 9*(4), 771–779. https://doi.org/10.1155/S0161171286000935

Jungck, G., & Rhoades, B. (1998). Fixed points for set valued functions without continuity. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. 29*(3), 227–238. https://www.researchgate.net/publication/236801026_Fixed_Points_for_Set_Valued_Functions_Without_Continuity

Khan, M., Swaleh, M., & Sessa, S. (1984). Fixed point theorems by altering distances between the points. *Bulletin of the Australian Mathematical Society, 30*(1), 1–9. https://doi.org/10.1017/S0004972700001659

Kumar, S. (2010). A note on jungck's fixed point theorem. *FASCICULI MATHEMATICI*(45), 59–69. http://fasciculi-mathematici.put.poznan.pl/fasci_contents.htm#n45

Morales, J., & Rojas, E. (2012). Some generalizations of jungck's fixed point theorem. *International Journal of Mathematics, 2012*, 1–19. https://doi.org/10.1155/2012/213876

Olatinwo, M., & Ishola, B. (2018). Some fixed point theorems involving rational type contractive operators in complete. *Surveys in Mathematics and its Applications, 13*, 107–117. https://www.utgjiu.ro/math/sma/v13/v13.html

Singh, S., & Tomar, A. (2003). Weaker forms of commuting maps and existence of fixed points. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series B-Pure and Applied Mathematics.* , *10*(3), 145–161. https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO200311922046647.page